

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

TRẦN ĐÌNH TƯỚNG

DÁNG ĐIỀU TIỆM CẬN CỦA MỘT SỐ
MÔ HÌNH QUẦN THỂ TRONG HỆ SINH THÁI
VỚI MÔI TRƯỜNG NGẪU NHIÊN

Mã số: 9460101.03

Chuyên ngành: Phương trình vi phân và tích phân

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI – 2019

Công trình này được hoàn thành tại: Bộ môn Phương trình Vi phân và Hệ động lực, Khoa Toán Cơ Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội

Người hướng dẫn khoa học: GS. TS. Nguyễn Hữu Dư
: TS. Nguyễn Thanh Diệu

Phản biện 1: ...

Phản biện 2: ...

Luận án được bảo vệ tại Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc Gia Hà Nội

Vào hồi, ngày tháng năm 2019

Luận án được công khai tại:

- Trung tâm Thông tin-Thư viện, Đại học Quốc Gia Hà Nội.
- Thư viện trường Đại học Khoa học Tự nhiên.

Mở đầu

Toán sinh học là ngành khoa học thuộc nhánh của sinh học nhằm mô hình hóa các quá trình sinh học, kiểm tra các giả thiết, trừu tượng hóa các quá trình sinh học để nghiên cứu các nguyên tắc chi phối cấu trúc, sự phát triển và hành vi của các hệ thống. Ngành khoa học này nhấn mạnh đến yếu tố toán học trong khi *Lý thuyết sinh học* lại nhấn mạnh đến yếu tố sinh học nhiều hơn. Với sự phức tạp của các hệ sinh học, toán sinh học đã trở thành công cụ hữu dụng để nghiên cứu lý thuyết và còn đóng góp có ý nghĩa trong thực nghiệm.

Việc nghiên cứu hệ động lực quần thể có lịch sử khá đồ sộ. Ngay từ những năm 1798 trong cuốn sách với tiêu đề "Bài luận về nguyên lý của quần thể", Malthus đã quan sát rằng sự gia tăng sản xuất lương thực của một quốc gia sẽ dẫn đến sự thịnh vượng của người dân. Nhưng sự cải thiện trên chỉ mang tính tạm thời vì nó dẫn đến tăng dân số, từ đó sẽ khôi phục lại mức sản xuất bình quân đầu người như ban đầu. Từ đó ông đề xuất quần mô hình dân số đơn giản nhất không có sự di cư. Sau đó vào những năm 1838, 1845 Verhulst đề xuất mô hình logistic. Năm 1910, Lotka trong nghiên cứu về lý thuyết tự động và lý thuyết cạnh tranh giữa các loài mà sau này được tiếp tục phát triển bởi Volterra (1928) đã giới thiệu mô hình Lotka-Volterra đơn giản nhất mà ngày nay người ta thường gọi là mô hình thú môi. Tiếp tục trên hướng nghiên cứu này, mô hình tăng trưởng tổng quát với dạng Kolmogorov đã được giới thiệu bởi nhà toán học người Nga Kolmogorov vào năm 1936 và từ đó còn rất nhiều học giả khác cũng tập trung hoàn thiện lý thuyết này.

Mặt khác, các mô hình dạng Kolmogorov có thể được áp dụng cho các mô hình phát triển quần thể trong dịch tễ học. Ngày nay, các mô hình nghiên cứu sự lan truyền dịch bệnh trong quần thể người ta gọi là các mô hình phân lớp được đề xuất bởi Kermack và McKendrick (1927) và còn được tiếp tục được nghiên cứu bởi các học giả khác. Mô hình đó thường được gọi là mô hình SIR. Theo đó các cá thể trong quần thể được chia làm 3 lớp. Lớp (S) là lớp các cá thể miễn cảm với dịch bệnh; Lớp (I) là lớp cá thể bị nhiễm bệnh và lớp (R) là lớp cá thể

đã phục hồi, miễn nhiễm hay chết đi. Ta còn thấy rằng, trong một số trường hợp cá thể sau khi miễn nhiễm lại rơi trở lại lớp (S). Mô hình để mô tả hiện tượng trên thường được gọi là mô hình tái nhiễm SIRS.

Người ta nhận thấy rằng, theo thời gian các quần thể sinh học trên thường bị chịu tác động các yếu tố ngẫu nhiên. Với sự tham gia các yếu tố này, các mô hình gần với thực tế hơn. Chẳng hạn, quá trình khuếch tán với bước chuyển trạng thái (còn gọi là bước chuyển Markov) thu hút được được sự quan tâm nghiên cứu bởi nhiều ứng dụng trong các bài toán mô hình hóa, phân tích và tối ưu hóa các bài toán trong thực tế. Những quá trình này có thể được xem như một số những quá trình khuếch tán có bước nhảy được điều chỉnh thông qua một thiết bị chuyển đổi ngẫu nhiên. Quá trình này gồm có hai phần: thành phần liên tục $X(t)$ và thành phần rời rạc ξ_t mô tả cho quá trình chuyển đổi giữa các trạng thái với thời điểm ngẫu nhiên. Ngoài ra hệ sinh thái còn chịu tác động bởi các hiện tượng xảy ra đột ngột như động đất, sóng thần hoặc sự di cư ồ ạt giữa các loài trong quần thể. Dưới tác động này, hệ quả tất yếu dẫn đến là sự ổn định của hệ sinh thái trở nên khó dự đoán, quỹ đạo của các loài có thể không liên tục và các mô hình trước đây không thể minh họa được hiện tượng trên. Từ đó các mô hình hỗn hợp của quá trình bước nhảy và quá trình khuếch tán được điều khiển bởi nhiễu trắng được xem xét. Mô hình này có thể xem như là sự tham gia hỗn hợp của hai thành phần: Thành phần tất định và thành phần ngẫu nhiên có sự tham gia của các bước nhảy. Mô hình này, ngay từ khi ra đời đã có những ứng dụng phong phú: sinh học, lý thuyết điều khiển, tự động hóa, toán tài chính, vv...

Khi nghiên cứu về hệ sinh thái, lớp các câu hỏi đến tự nhiên là: khi nào một loài trong quần thể phát triển mãi mãi hay diệt vong? Xa hơn nữa là đáng diệu tiệm cận nghiệm của quần thể sẽ như thế nào? Lớp câu hỏi này đã thu hút nhiều nhà nghiên cứu trong lĩnh vực tập trung giải đáp. Kỹ thuật thường được sử dụng để giải quyết các bài toán trên là lý thuyết giới hạn của các quá trình martingale và các bất đẳng thức dãi số để tìm ra lời giải cho sự tuyệt chủng của các loài. Hơn nữa, để tìm điều kiện cho hệ phát triển bền vững, kỹ thuật thường dùng là sử dụng các hàm Lyapunov hoặc số mũ Lyapunov, vv... Tuy nhiên các kết quả họ thu được thường là các điều kiện rất chặt và chỉ là điều kiện đủ. Vấn đề trên được nhóm tác giả Nguyễn Hữu Dư và cộng sự giải quyết cho 1 mô hình thú mồi ngẫu nhiên có đáp ứng chức năng dạng Beddington-DeAngelis vào năm

2016. Họ không những thu được điều kiện cần mà còn rất gần với điều kiện đủ cho sự phát triển bền vững cũng như là tính ergodic của loài nào đó trong quần thể thông qua ngưỡng tham số. Tiếp tục với ý tưởng trên, trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của một số mô hình quần thể trong hệ sinh thái với môi trường ngẫu nhiên dưới góc nhìn khác. Sử dụng kỹ thuật từ bài báo Nguyễn Hữu Dư và cộng sự (2016) chúng tôi mong muốn tìm ra điều kiện đủ và rất gần với điều kiện cần cho sự phát triển bền vững cũng như tính ergodic của hệ thông qua dấu của giá trị ngưỡng. Ngoài ra chúng tôi còn chứng minh được sự hội tụ của xác suất chuyển đến độ đo xác suất bất biến khi hệ không suy biến. Cụ thể, chúng tôi xét hai chủ đề tương ứng với 2 chương kết quả chính của luận án.

1. *Dáng điệu tiệm cận của một số hệ thú môi ngẫu nhiên.*

Trong chương này chúng tôi xét 2 mô hình thú môi. Trong mô hình thứ nhất chúng tôi xét hệ thú môi có bước chuyển trạng thái bị nhiễu bởi nhiễu trắng. Xuất phát từ bài toán được Nguyễn Hải Đăng và cộng sự giải quyết năm 2011.

$$\begin{cases} dx(t) = x(t)(a_1 - b_1y(t) - c_1x(t))dt + \sigma x^2(t)dB_1(t), \\ dy(t) = y(t)(-a_2 + b_2x(t) - c_2y(t))dt + \rho y^2(t)dB_2(t), \end{cases} \quad (0.1)$$

trong đó $x(t), y(t)$ lần lượt là mật độ của môi và thú, các tham số dương $a_1, b_1, c_1, \sigma, a_2, b_2, c_2, \rho, B_1(\cdot), B_2(\cdot)$ là các quá trình Brownian 1 chiều. Trong bài báo này, họ đã phát triển kết quả từ bài báo của Rudnicki (20013) trở thành hệ thú môi có hệ số nhiễu của chuyển động Brownian là phi tuyến. Họ đã chứng minh rằng nghiệm của mô hình có hàm mật độ dương và từ đó họ nghiên cứu sâu hơn về dáng điệu tiệm cận nghiệm của hệ bằng việc xét sự hội tụ của hàm mật độ này.

Trong luận án này chúng tôi tiếp tục mở rộng kết quả kết quả trên cho hệ lai ngẫu nhiên có bước chuyển trạng thái

$$\begin{cases} dx(t) = x(t)(a_1(\xi_t) - b_1(\xi_t)y(t) - c_1(\xi_t)x(t))dt + \sigma(\xi_t)x^2(t)dB_1(t), \\ dy(t) = y(t)(-a_2(\xi_t) + b_2(\xi_t)x(t) - c_2(\xi_t)y(t))dt + \rho(\xi_t)y^2(t)dB_2(t), \end{cases} \quad (0.2)$$

trong đó $\{\xi_t, t \geq 0\}$ là xích Markov liên tục phải nhận giá trị trong không gian trạng thái hữu hạn $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, N\}$. Ngoài ra giả sử rằng các hệ số của phương trình (0.2) dương với mọi $i \in \mathcal{S}$.

Bài toán còn lại trong chương 2 của luận án đến từ mô hình thú mồi tất định được giới thiệu bởi Kooij và cộng sự (1996)

$$\begin{cases} dx(t) = (x(t)[a_1 - b_1x(t)] - c_1y(t)[1 - e^{-\gamma x(t)}])dt \\ dy(t) = y(t)(-a_2 + c_2[1 - e^{-\gamma x(t)}])dt, \end{cases}$$

trong đó $x(t), y(t)$ lần lượt là mật độ của mồi và thú tương ứng. Các tham số dương $a_1, b_1, a_2, c_1, c_2, 1 - e^{-\gamma x(t)}$ là đại lượng thể hiện đáp ứng chức năng dạng Ivlev. Trong bài báo này, Kooij và cộng sự đã chứng minh sự tồn tại duy nhất của chu trình giới hạn đối với hệ trên. Ngoài ra họ còn chứng minh được những điều kiện của lý thuyết Zhang có thể được giảm nhẹ hơn. Sử dụng ý tưởng từ báo bài năm 2016 của Nguyễn Hữu Dư và cộng sự, chúng tôi muốn thiết lập điều kiện đủ và rất gần với điều kiện cần cho sự phát triển bền vững của hệ có đáp ứng chức năng dạng Ivlev trong điều kiện hệ bị chịu đồng thời cả nhiễu trắng và nhiễu Lévy. Cụ thể:

$$\begin{cases} dx(t) = (x(t)[a_1 - b_1x(t)] - c_1y(t)[1 - e^{-\gamma x(t)}])dt + \alpha x(t)dB_1(t) \\ \quad + \int_{\mathcal{U}} x(t_-)f_1(u)\tilde{N}(dt, du) \\ dy(t) = y(t)(-a_2 - b_2y(t) + c_2[1 - e^{-\gamma x(t)}])dt + \beta y(t)dB_2(t) \\ \quad + \int_{\mathcal{U}} y(t_-)f_2(u)\tilde{N}(dt, du), \end{cases} \quad (0.3)$$

trong đó α, β là các hằng số dương; $B_1(\cdot), B_2(\cdot)$ là các quá trình Brownian 1 chiều. Ngoài ra các đại lượng còn lại sẽ được giới thiệu trong Chương 2 của luận án.

Trong chương này, luận án sẽ tập trung giải quyết cho các vấn đề chính sau:

- Tìm điều kiện để nghiệm các hệ tồn tại và duy nhất. Liệu rằng tập $\mathbb{R}_+^{2,0}$ có là tập bất biến?
- Tìm ngưỡng tham số để phân loại đáng điệu tiệm cận nghiệm của hệ. Từ đó tìm ra điều kiện đủ và rất gần với điều kiện cho sự phát triển bền vững cũng như là tính ergodic của hệ.
- Đánh giá (cải tiến) tốc độ hội tụ của loài thú $x(t)$ đến nghiệm của hệ trên biên.
- Tìm điều kiện để hệ tồn tại phân phối dừng cũng như là điều kiện để luật số lớn có hiệu lực.

2. *Sự tuyệt chủng và bền vững của mô hình tái nhiễm SIRS ngẫu nhiên với tốc độ truyền bệnh tổng quát có bước chuyển trạng thái* Chương 3 của luận án đề cập đến mô hình tái nhiễm SIRS ngẫu nhiên với tốc độ truyền bệnh tổng quát có bước chuyển trạng thái. Ta có thể thấy rằng, nhiều nghiên cứu trên mô hình này sử dụng các hàm mô tả sự truyền bệnh khác nhau với sự tham gia và/hoặc của nhiễu trắng và bước chuyển trạng thái. Tuy nhiên, việc sử dụng các hàm khác nhau trong từng mô hình có nhiều điểm hạn chế như các hàm khác nhau dẫn đến kết quả đánh giá khác nhau. Hơn nữa để tìm ra điều kiện cần của sự tuyệt chủng, xấp xỉ thường dùng là dùng lý thuyết giới hạn của các quá trình martingale và các bất đẳng thức đại số. Các công cụ trên chỉ thỏa mãn cho một số lớp các hàm riêng biệt. Bên cạnh đó, việc sử dụng các hàm Lyapunov để đạt điều kiện đủ cho tính bền vững thường gặp khó khăn khi các điều kiện này thường rất chặt và khó kiểm chứng. Việc sử dụng các hàm Lyapunov trong các mô hình với hàm truyền bệnh khác nhau còn dẫn đến việc áp đặt các điều kiện khác nhau trên các hàm Lyapunov đó. Trong luận án này chúng tôi mong muốn giải quyết bài toán trên cho hàm truyền bệnh tổng quát bằng kỹ thuật mới. Cụ thể, chúng tôi xét

$$\begin{cases} dS(t) = (-S(t)I(t)F_1(S(t), I(t), \xi_t) + \mu(\xi_t)(K - S(t)) + \gamma_1(\xi_t)R(t))dt \\ \quad - S(t)I(t)F_2(S(t), I(t), \xi_t)dB(t) \\ dI(t) = (S(t)I(t)F_1(S(t), I(t), \xi_t) - (\mu(\xi_t) + \rho(\xi_t) + \gamma_2(\xi_t))I(t))dt \\ \quad + S(t)I(t)F_2(S(t), I(t), \xi_t)dB(t) \\ dR(t) = (\gamma_2(\xi_t)I(t) - (\mu(\xi_t) + \gamma_1(\xi_t))R(t))dt, \end{cases}$$

trong đó $S(t), I(t), R(t)$ lần lượt là lớp các cá thể miễn cảm với dịch bệnh, nhiễm bệnh và khỏi bệnh. Quá trình $\xi_t, t \geq 0$ là xích Markov liên tục phải nhận giá trị trên không gian hữu hạn trạng thái $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, N\}$, Các hàm dương $F_1(\cdot), F_2(\cdot)$ Lipchitz địa phương trên $[0, \infty)^2 \times \mathcal{S}$, $B(t)$ là quá trình Brownian một chiều, các tham số dương $K, \mu(i), \rho(i), \gamma_1(i), \gamma_2(i)$ ứng với mỗi $i \in \mathcal{S}$. Trọng tâm trong chương này luận án giải quyết các vấn đề sau

- Tìm điều kiện để hệ tồn tại và duy nhất nghiệm.
- Xây dựng ngưỡng tham số để phân loại trạng thái của hệ. Điều kiện này không chỉ là điều kiện cần mà còn rất gần với điều kiện đủ cho tính bền vững của hệ.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Quá trình ngẫu nhiên

1.1.1. Quá trình Martingale

Quá trình khả tích $\{\mathcal{F}_t\}$ -phù hợp $\mathbb{R}^n$ -giá trị $\{M_t\}_{t \geq 0}$ gọi là *martingale đối với $\{\mathcal{F}_t\}$* (martingale) nếu $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$ hầu chắc chắn với mọi $0 \leq s < t < \infty$. Quá trình khả tích $\{\mathcal{F}_t\}$ -phù hợp nhận giá trị thực $\{M_t\}_{t \geq 0}$ gọi là *martingale dưới với $\{\mathcal{F}_t\}$* (martingale dưới) nếu $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) \geq M_s$ hầu chắc chắn với mọi $0 \leq s < t < \infty$. Quá trình liên tục phải phù hợp $M = \{M_t\}_{t \geq 0}$ gọi là *martingale địa phương* nếu tồn tại dãy hàm không giảm $\{\tau_k\}_{k \geq 1}$ của thời điểm đứng với $\tau_k \uparrow \infty$ sao cho mỗi $\{M_{\tau_k \wedge t} - M_0\}$ là martingale.

Chú ý 1.1.1. Theo khai triển Doob-Meyer, nếu Y là martingale dưới thì sẽ tồn tại quá trình tăng khả đoán duy nhất $(A(t), t \geq 0)$ với $A(0) = 0$ hầu chắc chắn sao cho $Y(t) - Y(0) - A(t)$ với mỗi $t \geq 0$ là martingale khả tích đều. Hơn nữa, nếu với mỗi $Y(t) = M^2(t)$ trong đó M là martingale bình phương khả tích, ta có thể nói rằng $\langle M, M \rangle(t) = A(t)$ với mỗi $t \geq 0$. Trong trường hợp này $\langle M, M \rangle(t)$ gọi là đặc trưng của M . Trong một số trường hợp, đặc trưng này có thể xác định như sau nếu $M = B(\cdot)$, trong đó $B(\cdot)$ quá trình Brownian một chiều thì $\langle M, M \rangle(t) = t$; Nếu $M = \tilde{N}(\cdot, \cdot)$, với $\tilde{N}(\cdot, \cdot)$ là quá trình Poisson bù với cường độ λ khi đó $\langle M, M \rangle(t) = \lambda t$ với mỗi $t \geq 0$. Từ đó ta có,

Định lý 1.1.1. Cho $M = \{M_t\}_{t \geq 0}$ là martingale địa phương nhận giá trị thực triệt tiêu tại $t = 0$. Khi đó

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle M, M \rangle_t = \infty \quad \text{hầu chắc chắn} \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_t}{\langle M, M \rangle_t} = 0, \quad a.s.,$$

và ta cũng thu được

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle M, M \rangle_t}{t} < \infty \quad \text{hầu chắc chắn} \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_t}{t} = 0 \quad a.s.$$

1.1.2. Quá trình Markov

Quá trình $\mathcal{F}_t$ -phù hợp n chiều $X = \{X(t)\}_{t \geq 0}$ gọi là *quá trình Markov* nếu tính chất Markov được thỏa mãn: với mọi $0 \leq s \leq t < \infty$ và $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$\mathbb{P}(X(t) \in A | \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X(t) \in A | X(s)).$$

Định nghĩa 1.1.2. Quá trình Markov X gọi là *ergodic* nếu tồn tại độ đo xác suất bất biến π sao cho

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|P(t, x, \cdot) - \pi\| = 0, \quad (1.1)$$

trong đó chuẩn trong (1.1) là chuẩn biến phân toàn phần, nghĩa là, với mỗi độ đo μ và mọi hàm đo được f từ $(X, \mathcal{B}(X))$ đến $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, ta có $\|\mu\| := \sup \int_{|f(x)| \leq 1} f(x) \mu(dx)$

Định nghĩa 1.1.3. Quá trình Markov X gọi là *ergodic mũ* nếu nó là quá trình f -ergodic mũ với ít nhất $f \geq 1$ sao cho

$$\|P(t, x, \cdot) - \pi\| \leq M(x) \rho^t, \quad \forall t \geq 0,$$

1.1.3. Quá trình Lévy

Cho $\nu(\cdot)$ là độ đo Borel xác định trên $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, độ đo $\nu(\cdot)$ gọi là *độ đo Lévy* nếu $\int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} (|y|^2 \wedge 1) \nu(dy) < \infty$.

Quá trình bước nhảy tương ứng với quá trình Lévy $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ được xác định như sau $\Delta X = (\Delta X(t), t \geq 0)$ trong đó $\Delta X(t) = X(t) - X(t_-)$, với mỗi $t \geq 0$. Để đếm số bước nhảy của quá trình Lévy $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$, với mỗi $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, ta xác định $N(t, A) = \#\{0 \leq s \leq t; \Delta X(s) \in A\} = \sum_{0 \leq s \leq t} \mathbf{1}_A(\Delta X(s))$. Theo khai triển Doob-Meyer, ta có thể xây dựng *độ đo ngẫu nhiên Poisson bù* xác định bởi $\tilde{N}(t, A) = N(t, A) - \nu(A)t$.

1.2 Phương trình vi phân ngẫu nhiên (SDEs)

1.2.1. SDEs với bước chuyển Markov

Cho $\xi_t, t \geq t_0$ ($t_0 \geq 0$) là xích Markov liên tục phải trên không gian xác suất nhận giá trị trong tập hữu hạn trạng thái $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ với ma trận chuyển $\Gamma = (q_{ij})_{N \times N}$

$$\mathbb{P}\{\xi_{t+\delta} = j | \xi_t = i\} = \begin{cases} q_{ij}\delta + o(\delta) & \text{if } i \neq j, \\ 1 + q_{ii}\delta + o(\delta) & \text{if } i = j, \end{cases}$$

trong đó $\delta \rightarrow 0$. q_{ij} là cường độ chuyển từ trạng thái i đến trạng thái j và $q_{ij} \geq 0$ nếu $i \neq j$, trong khi $q_{ii} = -\sum_{i \neq j} q_{ij}$. Xuyên suốt luận án, ta giả sử rằng $\xi_t, t \geq t_0$ là bất khả qui. Ngoài ra ta còn giả sử rằng xích Markov $\xi_t, t \geq t_0$ $\mathcal{F}_t$ -phù hợp nhưng độc lập với các quá trình Brown $B(t) = (B_1(t), B_2(t), \dots, B_m(t))^T, t \geq 0$. Xét hệ lai ngẫu nhiên có bước chuyển Markov

$$dx(t) = f(x(t), t, \xi_t)dt + g(x(t), t, \xi_t)dB(t), \quad t_0 \leq t \leq T \quad (1.2)$$

Định nghĩa 1.2.1. Nghiệm tầm thường của (1.2), $x(t) \equiv 0$ gọi là

- *Ổn định theo xác suất*, Nếu với mỗi bộ 3 $\varepsilon \in (0, 1), \rho > 0, t_0 \geq 0$, tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon, \rho, t_0) > 0$ sao cho $\mathbb{P}\{|x(t; t_0, x_0, i)| < \rho \text{ for all } t \geq t_0\} \geq 1 - \varepsilon$, với điều kiện ban đầu $(x_0, i) \in \mathcal{B}_\delta \times \mathcal{S}$.
- *Ổn định tiệm cận theo xác suất*, nếu nó ổn định theo xác suất, hơn nữa, với mỗi cặp $\varepsilon \in (0, 1)$ và $t_0 \geq 0$, tồn tại $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, t_0)$ sao cho $\mathbb{P}\{\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; t_0, x_0, \xi_0) = 0\} \geq 1 - \varepsilon$, với mọi $(x_0, i) \in \mathcal{B}_{\delta_0} \times \mathcal{S}$.

Định lý 1.2.1. Nếu $V \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{S})$ khi đó với mọi $t \geq 0$ ta có

$$\begin{aligned} V(x(t), t, \xi_t) &= V(x(t), t, \xi_t) + \int_0^t \mathcal{L}V(x(s), s, \xi_s)ds \\ &+ \int_0^t V_x(x(s), s, \xi_s)g(x(s), s, \xi_s)dB(s) \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} [V(x(s), s, i_0 + (h(\xi_s), l)) - V(x(s), s, \xi_s)] \mu(ds, dl). \end{aligned}$$

1.2.2. Phương trình vi phân có bước nhảy

Xét phương trình tích phân ngẫu nhiên dạng Lévy-Itô

$$\begin{aligned} dX(t) &= F(t)dt + G(t)dB_j(t) + \int_{|u|<c} H(t, u)\tilde{N}(dt, du) \\ &+ \int_{|u|\geq c} K(t, u)N(dt, du), \end{aligned} \quad (1.3)$$

với $t \geq t_0, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, $X(t)$ là quá trình ngẫu nhiên $\mathbb{R}^n$ -giá trị, $(F^i)^{\frac{1}{2}}, G_j^i \in \mathcal{P}_2(t), H^i \in \mathcal{P}_2(t, E)$ và K khả đoán và $0 \leq c \leq \infty$. Xuyên suốt luận án, ta giả sử rằng, quá trình Brown m -chiều $\mathcal{F}_t$ -phù hợp $B(t) = (B_1(t), B_2(t), \dots, B_m(t))$ với mỗi $B(t)$ độc lập với độ đo Poisson ngẫu nhiên $\mathcal{F}_t$ -phù hợp $N(\cdot, \cdot)$ xác định trên $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ với độ đo bù $\tilde{N}(\cdot, \cdot)$ và cường độ đo $\nu(\cdot)$ trong đó $\nu(\cdot)$ là độ đo Lévy.

Định lý 1.2.2. Nếu X là tích phân ngẫu nhiên Lévy-Itô có dạng (1.3). Khi đó với mỗi hàm $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $t \geq t_0$, hầu chắc chắn, ta có

$$\begin{aligned} & f(X(t)) - f(X(0)) \\ &= \int_{t_0}^t \partial_i f(X(s_-)) dX_{(c)}^i(s) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \partial_i \partial_j f(X(s_-)) d[X_{(c)}^i, X_{(c)}^j](s) \\ &+ \int_{t_0}^t \int_{|u| \geq c} [f(X(s_-) + K(s, u)) - f(X(s_-))] N(ds, du) \\ &+ \int_{t_0}^t \int_{|u| \leq c} [f(X(s_-) + H(s, u)) - f(X(s_-))] \tilde{N}(ds, du) \\ &+ \int_{t_0}^t \int_{|u| \leq c} [f(X(s_-) + H(s, u)) - f(X(s_-)) - H^i(s, u) \partial_i f(X(s_-))] \nu(du) ds. \end{aligned}$$

1.3 Một vài khái niệm thường dùng của hệ sinh thái

Xét hệ ngẫu nhiên Kolmogorov tổng quát

$$dX_i(t) = X_i(t) f_i(\mathbf{X}(t)) dt + X_i(t) g_i(\mathbf{X}(t)) dE_i(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (1.4)$$

nhận giá trị trên $[0, \infty)^n$. Giả sử rằng $\mathbf{E}(t) = (E_1(t), \dots, E_n(t))^T = \Gamma^T \mathbf{B}(t)$ trong đó Γ là ma trận $n \times n$ thỏa mãn $\Gamma^T \Gamma = (\sigma_{ij})_{n \times n}$ và $\mathbf{B}(t) = (B_1(t), \dots, B_n(t))$ là véc tơ của quá trình Brown độc lập.

Định nghĩa 1.3.1. Quá trình $\mathbf{X}$ gọi là *bền vững ngẫu nhiên mạnh* nếu nó có độ đo xác suất bất biến trên π^* on $\mathbb{R}_+^{n, \circ}$ và

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|P_{\mathbf{X}}(t, \mathbf{x}, \cdot) - \pi^*(\cdot)\| = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^{n, \circ}$$

trong đó $\|\cdot, \cdot\|$ là chuẩn biến phân toàn phần và $P_{\mathbf{X}}(t, \mathbf{x}, \cdot)$ là xác suất chuyển của $(\mathbf{X}(t))_{t \geq t_0}$.

Định nghĩa 1.3.2. Nếu $\mathbf{X}(0) = \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^{n, \circ}$ ta nói loài X_i *tuyệt chủng* nếu với mọi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^{n, \circ}$

$$\mathbb{P}_{\mathbf{x}} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} X_i(t) = 0 \right\} = 1.$$

Định nghĩa 1.3.3. Hệ (1.4) gọi là *bền vững ngẫu nhiên* nếu với mọi $\varepsilon \in (0, 1)$, tồn tại cặp hằng số dương $\delta = \delta(\varepsilon)$ và $\chi = \chi(\varepsilon)$ sao cho

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\mathbf{x}} \{ |\mathbf{X}(t)| \leq \chi \} \geq 1 - \varepsilon \quad \text{và} \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\mathbf{x}} \{ |\mathbf{X}(t)| \geq \delta \} \geq 1 - \varepsilon,$$

trong đó $\mathbf{x} = \mathbf{X}(0) \in \mathbb{R}_+^{n, \circ}$.

Chương 2

Dáng điệu tiệm cận của hệ thú môi ngẫu nhiên

2.1 Dáng điệu tiệm cận của mô hình thú môi ngẫu nhiên có bước chuyển trạng thái

Xét hệ lai khuếch tán có bước chuyển trạng thái

$$\begin{cases} dx(t) = x(t)(a_1(\xi_t) - b_1(\xi_t)y(t) - c_1(\xi_t)x(t))dt + \sigma(\xi_t)x^2(t)dB_1(t), \\ dy(t) = y(t)(-a_2(\xi_t) + b_2(\xi_t)x(t) - c_2(\xi_t)y(t))dt + \rho(\xi_t)y^2(t)dB_2(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

trong đó $\{\xi_t, t \geq 0\}$ là xích Markov liên tục phải nhận giá trị trên không gian hữu hạn trạng thái $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, N\}$. $x(t)$ và $y(t)$ lần lượt là mật độ của môi và thú, các hệ số dương: $a_1(i)$ là cường độ phát triển nội tại của môi; $b_1(i), b_2(i)$ biểu thị cho các cường độ tương tác giữa 2 loài. $c_1(i), c_2(i)$ là cường độ cạnh tranh nội tại của từng loài; $a_2(i)$ cường độ chết của thú khi không có môi; Các hệ số $\sigma(i)$ và $\rho(i)$ biểu thị cho cường độ nhiễu của môi trường lên từng loài với mọi $i \in \mathcal{S}$; $B_1(t)$ và $B_2(t)$ các quá trình Brown 1 chiều.

2.1.1. Điều kiện đủ và rất gần với điều kiện cần cho sự bền vững

Định lý 2.1.1. Với mọi giá trị ban đầu $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}_+^2$, Phương trình (2.1) sẽ có nghiệm duy nhất trên $t \geq 0$ và nghiệm sẽ ở lại trong tập $\mathbb{R}_+^2$ hầu chắc chắn. Hơn nữa, tập $\mathbb{R}_+^{2,0}$ là tập bất biến, có nghĩa là nếu $x(0) > 0, y(0) > 0$ thì $x(t) > 0, y(t) > 0 \forall t > 0$.

Khi vắng thú, ta có phương trình trên biên

$$\begin{cases} d\hat{x}(t) = \hat{x}(t)(a_1(\xi_t) - c_1(\xi_t)\hat{x}(t))dt + \sigma(\xi_t)\hat{x}^2(t)dB_1(t), \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0 > 0, t \geq 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Ta có thể chứng minh rằng $\{(\hat{x}(t), \xi_t), t \geq 0\}$ là quá trình Markov process có phân phối dừng $\mu^*(dx, i)$ tập trung trên $(0, \infty) \times \mathcal{S}$. Do vậy, theo Định lý 1.1.1,

ta có

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t b_2(\xi_s) \widehat{x}(s) ds = \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^+} b_2(i) x \mu^*(dx, i) := m_1.$$

Đặt $z(t) = \frac{1}{x(t)}$, $\widehat{z}(t) = \frac{1}{\widehat{x}(t)}$ và ứng dụng Định lý 1.2.1 ta được

$$dz(t) = (-a_1(\xi_t)z(t) + b_1(\xi_t)y(t)z(t) + c_1(\xi_t) + \sigma^2(\xi_t)z^{-1}(t))dt - \sigma(\xi_t)dB_1(t), \quad (2.3)$$

$$d\widehat{z}(t) = (-a_1(\xi_t)\widehat{z}(t) + c_1(\xi_t) + \sigma^2(\xi_t)\widehat{z}^{-1}(t))dt - \sigma(\xi_t)dB_1(t). \quad (2.4)$$

Định lý so sánh nghiệm cho chúng ta $z(t) \geq \widehat{z}(t) \forall t \geq 0$, miễn là $z(0) = \widehat{z}(0) > 0, y(0) \geq 0$. Hay một cách khác,

$$x(t) \leq \widehat{x}(t) \forall t \geq 0, \text{ provided } x(0) = \widehat{x}(0) > 0, y(0) \geq 0. \quad (2.5)$$

Tương tự, ta xét phương trình trên biên của thú khi vắng môi

$$\begin{cases} d\widehat{y}(t) = \widehat{y}(t)(-a_2(\xi_t) - c_2(\xi_t)\widehat{y}(t))dt + \rho(\xi_t)\widehat{y}^2(t)dB_2(t), \\ \widehat{y}(0) = \widehat{y}_0 \geq 0, t \geq 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Định lý so sánh nghiệm cho ta $y(t) \geq \widehat{y}(t)$ a.s. miễn là $y(0) = \widehat{y}(0) \geq 0, x(0) \geq 0$. Từ hệ phương trình (2.6), ta thấy rằng $\lim_{t \rightarrow \infty} \widehat{y}(t) = 0$. Gọi $A_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t a_1(\xi_s) ds = \sum_{i=1}^N a_1(i)\pi_i$; $A_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t a_2(\xi_s) ds = \sum_{i=1}^N a_2(i)\pi_i$. Để phân loại trạng thái của hệ, chúng tôi xây dựng ngưỡng

$$\lambda = \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^+} b_2(i) x \mu^*(dx, i) - \sum_{i=1}^N a_2(i)\pi_i = m_1 - A_2. \quad (2.7)$$

Định lý 2.1.2. Với λ được xác định bởi (3.2), ta có

- (i) Nếu $\lambda < 0$ thú đến một lúc nào đó sẽ diệt vong. Trong trường hợp này, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln y(t)}{t} = \lambda$ hầu chắc chắn. Hơn nữa, với mọi số thực thỏa mãn $\lambda < \bar{\lambda}$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\bar{\lambda}t} (x(t) - \widehat{x}(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\bar{\lambda}t} \left(\frac{1}{x(t)} - \frac{1}{\widehat{x}(t)} \right) = 0, \text{ provided } x(0) = \widehat{x}(0) > 0.$$

- (ii) Nếu $\lambda > 0$, quá trình Markov $\{(x(t), y(t), \xi_t), t \geq 0\}$ có độ đo xác suất bất biến duy nhất ψ^* tập trung trên $\mathbb{R}_+^{2,\circ} \times \mathcal{S}$. Hơn nữa, nếu $B_1(t), B_2(t), \xi_t$ độc lập, giá của ψ^* là toàn bộ không gian $\mathbb{R}_+^{2,\circ} \times \mathcal{S}$.

Để chứng minh Định lý 2.1.2, ta cần bổ đề sau.

Bổ đề 2.1.3. các khẳng định sau là đúng với xác suất 1.

- a) $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left(b_2(\xi_s)x(s) - c_2(\xi_s)y(s) - \frac{\rho^2(\xi_s)}{2}y^2(s) \right) ds \leq A_2,$
- b) $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left(b_2(\xi_s)x(s) - c_2(\xi_s)y(s) - \frac{\rho^2(\xi_s)}{2}y^2(s) \right) ds \geq 0,$
- c) $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left(b_1(\xi_s)y(s) + c_1(\xi_s)x(s) + \frac{\sigma^2(\xi_s)}{2}x^2(s) \right) ds \geq A_1,$
- d) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left(c_1(\xi_s)\hat{x}(s) + \frac{\sigma^2(\xi_s)}{2}\hat{x}^2(s) \right) ds = A_1.$

Chứng minh Định lý 2.1.2. Trước hết ta chứng minh khẳng định (i).

Gọi $\lambda < \bar{\lambda}$, bằng công thức L' Hospital, ta có thể chứng minh rằng $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\bar{\lambda}t}(z(t) - \hat{z}(t)) = 0$. Chú ý rằng $x(t) \leq \hat{x}(t) \forall t \geq 0$ và theo công thức công thức Itô ta có

$$\begin{aligned} \frac{\ln y(t)}{t} &\leq \frac{\ln y(0)}{t} + \frac{1}{t} \int_0^t \left(-a_2(\xi_s) + b_2(\xi_s)\hat{x}(s) - c_2(\xi_s)y(s) - \frac{\rho^2(\xi_s)}{2}y^2(s) \right) ds \\ &\quad + \frac{1}{t} \int_0^t \rho(\xi_s)y(s)dB_2(s). \end{aligned}$$

Từ điều này và định nghĩa của λ , ta dẫn đến $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln y(t)}{t} \leq \lambda < 0$. Từ đó ta có

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln y(t) - \ln x(t)}{t} \leq \lambda < 0. \quad (2.8)$$

Từ (2.8) ta được $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\bar{\lambda}t}(z(t) - \hat{z}(t)) = 0$. Mặt khác, gọi $\bar{\bar{\lambda}}$ là số thực thỏa mãn $\lambda < \bar{\bar{\lambda}} < \bar{\lambda}$. Từ $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \hat{x}(t)}{t} = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(\bar{\bar{\lambda}} - \bar{\lambda})t}\hat{x}^2(t) = 0$. Khẳng định cuối cùng của i) được suy ra từ Định lý 1.2.1.

ii). Với mọi hàm f xác định trên $\mathcal{S}$, gọi $\check{f} := \max_{i \in \mathcal{S}} f(i)$ và $\hat{f} := \min_{i \in \mathcal{S}} f(i)$. Ta có thể chứng minh được

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (y(s) + y^2(s))ds \geq \frac{\lambda \hat{c}_1}{\bar{b}_2 \Delta}, \quad (2.9)$$

với $\Delta = \max \left\{ \check{b}_1 + \frac{\check{c}_1}{\check{b}_2} \check{c}_2, \frac{\check{c}_1 \check{\rho}^2}{2\check{b}_2} \right\}$. Gọi $H > \max \left\{ \frac{8m_1}{\nabla \check{\rho}^2}, \frac{4m_2}{\nabla \check{c}_1} \right\}$, trong đó $m_2 := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t c_1(\xi_s) \hat{x}(s) ds = \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^+} c_1(i) x \mu^*(dx, i) < \infty$, ta có

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{(x(s), y(s), \xi_s) \in A\}} ds \geq \frac{\nabla}{2} \quad \text{a.s.}, \quad (2.10)$$

với $A = \{(x, y) : 0 \leq x < H, h \leq y^2 < H\} \times \mathcal{S}$. Hơn nữa, từ (2.10), theo bổ đề Fatou, ta có

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P(s, (x, y, i), A) ds \geq \frac{\nabla}{2} \quad \forall (x, y, i) \in \mathbb{R}_+^{2,\circ} \times \mathcal{S}. \quad (2.11)$$

Từ $\mathcal{M} = \{(x, y) : x \geq 0, y > 0\}$ là bất biến đối với Phương trình (2.1), từ đó ta có thể xét quá trình Markov $\{(x(t), y(t), \xi_t), t \geq 0\}$ trên không gian trạng thái $\mathcal{M} \times \mathcal{S}$. Từ bất đẳng thức (2.11) và tính compact của A trong $\mathcal{M} \times \mathcal{S}$ dẫn đến tồn tại độ đo xác suất bất biến ψ^* trên $\mathcal{M} \times \mathcal{S}$. Từ sự bất biến của $\mathbb{R}_+^{2,\circ} \times \mathcal{S}$ cho ta ψ^* là độ đo xác suất bất biến của $\{(x(t), y(t), \xi_t), t \geq 0\}$ trên không gian $\mathbb{R}_+^{2,\circ} \times \mathcal{S}$. $\square$

Định lý 2.1.4. *Nếu $\lambda > 0$, (2.1) có duy nhất độ đo xác suất bất biến ψ^* với giá $\mathbb{R}_+^{2,\circ} \times \mathcal{S}$. Hơn nữa,*

- (i) *Luật mạnh số lớn có hiệu lực, có nghĩa là với mọi ψ^* -khả tích $f : \mathbb{R}_+^{2,\circ} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$, với mọi $(x(0), y(0), i) \in \mathbb{R}_+^{2,\circ} \times \mathcal{S}$, ta có*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(x(s), y(s), \xi_s) ds = \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}_+^{2,\circ}} f(x, y, i) \psi^*(dx, dy, i) \quad \text{a.s.}$$

- (ii) *Với mọi $(x, y, i) \in \mathbb{R}_+^{2,\circ} \times \mathcal{S}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|P(t, (x, y, i), \cdot) - \psi^*(\cdot)\| = 0$, trong đó $P(t, (x, y, i), \cdot)$ là xác suất chuyển của $(x(t), y(t), \xi_t)$, $\|\cdot\|$ là chuẩn biến phân toàn phần.*

2.1.2. Ví dụ

Để khẳng định các kết quả trên, chúng tôi xét hai ví dụ để minh họa rằng tính chất của hệ sẽ thay đổi hoàn toàn phụ thuộc vào dấu của ngưỡng tham số của hệ được sinh từ bước chuyển Markov. Giả sử rằng $\mathcal{S} = \{1, 2\}$.

Ví dụ 2.1.1. Trong ví dụ này chúng tôi sẽ chỉ ra rằng quần thể là bền vững trong từng trạng thái. Tuy nhiên có bước chuyển Markov hệ sẽ tuyệt chủng. Thật vậy, xét Phương trình (2.1) tại mỗi trạng thái, giá trị các hệ số được cho trong bảng 2.1. Tại trạng thái 1, ta có thể tính được $\lambda_1 = 0.4763 > 0$; tại trạng

Trạng thái \ Hệ số	a_1	a_2	b_1	b_2	c_1	c_2	σ	ρ
1	0.9	2.5	2	2.8	0.6	5	0.6	4
2	0.2	0.1	1	4	3	0.5	1.5	4

Bảng 2.1: Tham số của mô hình trong Ví dụ 2.1.1

thái 2, $\lambda_2 = 0.1602 > 0$. Điều này có nghĩa tại mỗi trạng thái, hệ bền vững. Tuy nhiên khi có bước chuyển trạng thái với cường độ chuyển $q_{12} = 0.2$, $q_{21} = 0.6$, phân phối dừng của ξ_t trong trường hợp này là $\pi = (0.75, 0.25)$, ta có thể tính được $\lambda = -0.1555 < 0$. Điều này thể hiện rằng môi của hệ là tuyệt chủng.

Ví dụ 2.1.2. Ví dụ thứ 2 minh họa trường hợp ngược lại khi có bước chuyển trạng thái tác động vào hệ. Xét hệ (2.1), giá trị các hệ số tại mỗi trạng thái được cho trong Bảng 2.2 sau. Thực hiện các tính toán như trên, tại trạng thái 1,

Trạng thái \ Hệ số	a_1	a_2	b_1	b_2	c_1	c_2	σ	ρ
1	0.2	0.45	1	9.5	5	1	2	4
2	1	0.85	0.5	3.6	4.2	2	1.5	4

Bảng 2.2: Tham số của mô hình trong Ví dụ 2.1.2

$\lambda_1 = -0.0760 < 0$, $\lambda_2 = -0.0442 < 0$ cho trạng thái 2. Điều này dẫn đến thú tại mỗi trạng thái đến một lúc nào đó sẽ diệt vong. Tuy nhiên khi xảy ra nhiễu với cường độ chuyển $q_{12} = 0.2$ và $q_{21} = 0.6$, ta có thể ước lượng $\lambda = 0.0637 > 0$ bằng luật số lớn. Điều này chứng tỏ rằng, trong trường hợp này, hệ (2.1) bền vững và tồn tại phân phối dừng.

2.2 Dáng điệu tiệm cận của mô hình thú môi ngẫu nhiên với đáp ứng chức năng Ivlev và có bước nhảy

Xét mô hình có đáp ứng chức năng dạng Ivlev bị chịu đồng thời cả nhiễu trắng và nhiễu Lévy.

$$\begin{cases} dx(t) = (x(t)[a_1 - b_1x(t)] - c_1y(t)[1 - e^{-\gamma x(t)}])dt + \alpha x(t)dB_1(t) \\ \quad + \int_{\mathcal{U}} x(t_-)f_1(u)\tilde{N}(dt, du) \\ dy(t) = y(t)(-a_2 - b_2y(t) + c_2[1 - e^{-\gamma x(t)}])dt + \beta y(t)dB_2(t) \\ \quad + \int_{\mathcal{U}} y(t_-)f_2(u)\tilde{N}(dt, du), \end{cases} \quad (2.12)$$

trong đó $x(t), y(t)$ lần lượt là mật độ của môi và thú. Các tham số dương: a_1 là cường độ phát triển nội tại của môi; b_1 là tỷ lệ cạnh tranh nội tại của môi; c_1 là lượng môi cực đại có thể được tiêu thụ bởi thú trong 1 đơn vị thời gian; a_2 tỷ lệ tử vong của thú; c_2 hiệu quả chuyển đổi; γ biểu thị sự giảm động lực săn bắt; Các hằng số dương α, β ; $\mathcal{U} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và $B_1(\cdot), B_2(\cdot)$ là các quá trình Brown 1 chiều, $\mathcal{F}_t$ -phù hợp; $\tilde{N}(\cdot, \cdot)$ là độ đo ngẫu nhiên Poisson, $f_1(\cdot), f_2(\cdot)$ là các hàm liên tục thỏa mãn các Giả thiết 2.2.1 sau.

Giả thiết 2.2.1. $\forall u \in \mathcal{U}$ và $i = 1, 2$, giả sử rằng

- Các hàm $f_i(u) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục, $f_i(u) + 1 > 0$.
- $\sup \left\{ \int_{\mathcal{U}} \ln^2(f_i(u) + 1)\nu(du), \int_{\mathcal{U}} f_i^2(u)\nu(du) \right\} = C < \infty$. Điều kiện này nhằm đảm bảo rằng cường độ của nhiễu Poisson lên hệ là không quá lớn.

Gọi

$$M_1(t) = \int_0^t \int_{\mathcal{U}} \ln(f_1(u)+1)\tilde{N}(ds, du); \quad M_2(t) = \int_0^t \int_{\mathcal{U}} \ln(f_2(u)+1)\tilde{N}(ds, du);$$

$$\rho := a_1 - \frac{\alpha^2}{2} + \int_{\mathcal{U}} [\ln(f_1(u) + 1) - f_1(u)]\nu(du).$$

Theo Giả thiết 2.2.1 and Định lý 1.1.1 ta có

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_i(t)}{t} = 0; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_i(t)}{t} = 0, \quad \forall i = 1, 2. \quad (2.13)$$

Trong mục này ta giả sử rằng Giả thiết 2.2.1 được thỏa mãn. Hơn thế nữa, các quá trình Brown $B_i(\cdot)$ và độ đo Poisson ngẫu nhiên $N(\cdot, \cdot)$ độc lập với nhau.

Định lý 2.2.1. Với điều kiện ban đầu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^{2,0}$, (2.12) có nghiệm dương toàn cục duy nhất $x(t), y(t), t \geq 0$. Hơn nữa, $\mathbb{R}_+^{2,0}$ là tập bất biến dương với phương trình (2.12) theo nghĩa với điều kiện ban đầu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^{2,0}$, $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}_+^{2,0}$, hầu chắc chắn, với mọi $t \geq 0$.

Với điều kiện ban đầu $\varphi(0) = x(0) = x_0$, xét phương trình trên biên

$$d\varphi(t) = \varphi(t)[a_1 - b_1\varphi(t)]dt + \alpha\varphi(t)dB_1(t) + \int_U \varphi(t_-)f_1(u)\tilde{N}(dt, du) \quad (2.14)$$

Mệnh đề 2.2.2. Nếu $\rho < 0$ thì $x(t)$ dần đến 0 và $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ với tốc độ mũ.

Từ bổ đề này, từ đây về sau ta luôn giả sử $\rho > 0$.

Bổ đề 2.2.3. Với mọi số dương p đủ nhỏ, ta có

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\varphi^{-p}(t) + \varphi^2(t)) < \infty.$$

Từ đó, quá trình $\varphi(t), t \geq 0$ ergodic. Hơn nữa,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \varphi(t)}{t} = 0, \text{ a.s.} \quad (2.15)$$

Chú ý 2.2.2. Từ chứng minh của Bổ đề 2.1.3 và tính ergodic của $\varphi(t)$, với mọi $0 < p < 2$,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \varphi^p(s)ds = \int_{\mathbb{R}_+} x^p \pi^\varphi(dx) =: K_p < \infty. \quad (2.16)$$

2.2.1. Điều kiện đủ và rất gần với điều kiện cần cho sự bền vững

Để nghiên cứu về dáng điệu tiệm cận nghiệm của Phương trình (2.12), ta xây dựng ngưỡng

$$\lambda := -a_2 - \frac{\beta^2}{2} + \int_0^\infty c_2(1 - e^{-\gamma x})\pi^\varphi(dx) + \int_U [\ln(f_2(u) + 1) - f_2(u)]\nu(du). \quad (2.17)$$

Định lý 2.2.4. Từ đó ta có kết quả sau:

- (i) Nếu $\lambda < 0$ thì đến một lúc nào đó sẽ diệt vong. Ngoài ra với mọi số thực $\bar{\lambda} > \max\{-\rho, \lambda\}$ ta có

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\bar{\lambda}t}(\varphi(t) - x(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\bar{\lambda}t} \left(\frac{1}{x(t)} - \frac{1}{\varphi(t)} \right) = 0, \text{ miễn là } \varphi(0) = x_0 > 0.$$

(ii) Nếu $\lambda > 0$ quá trình $(x(t), y(t))$ tồn tại độ đo xác suất bất biến tập trung trên $\mathbb{R}_+^{2,0}$.

Chứng minh. (i). Ta có thể chứng minh được,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln y(t) \leq \lambda < 0, \text{ a.s.} \quad (2.18)$$

Ngoài ra, khi $\lambda < 0$, nghiệm $y(t)$ với điều kiện ban đầu $y(0) = y_0$, hội tụ đến 0 khi $t \rightarrow \infty$ với tốc độ mũ. Từ đánh giá này, định lý so sánh nghiệm và Định lý 1.2.1 cho ta

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln y(t) - \ln x(t)}{t} \leq \lambda < 0. \quad (2.19)$$

Gọi $\bar{\lambda} > \max\{-\rho, \lambda\}$ tùy ý, theo công thức biên thiên hằng số, ta được

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\bar{\lambda}t} \left(\frac{1}{x(t)} - \frac{1}{\varphi(t)} \right) = 0. \quad (2.20)$$

Phần còn lại của khẳng định i) được chứng minh tương tự như trong Định lý (2.1.2).

Để chứng minh ii), ta xét phương trình trên biên

$$d\psi(t) = \psi(t) \left(-a_2 - b_2\psi(t) + c_2 \right) dt + \beta\psi(t)dB_2(t) + \int_{\mathcal{U}} \psi(t_-)f_2(u)\tilde{N}(dt, du). \quad (2.21)$$

Để thấy $y(t) \leq \psi(t)$ hầu chắc chắn khi $\psi(0) = y_0 > 0$. Ngoài ra từ giả thiết $\lambda > 0$ ta được

$$-a_2 - \frac{\beta^2}{2} + c_2 + \int_{\mathcal{U}} [\ln(f_2(u) + 1) - f_2(u)]\nu(du) > 0.$$

Tương tự như trong Equation (2.14), ta cũng thu được

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \psi^p(s)ds = \int_{\mathbb{R}_+} x^p \pi^\psi(dx) =: \tilde{K}_p < \infty, \text{ for any } 0 < p < 2. \quad (2.22)$$

Từ đó ta có,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(s)ds \geq \frac{b_1\lambda}{b_1b_2 + c_2c_1\gamma^2} := \kappa > 0. \quad (2.23)$$

Gọi $G := \{(x, y) : 0 < x \leq H, \hbar \leq y \leq H\}$, theo bổ đề Fatou

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P(s, (x, y), G)ds \geq \frac{(\kappa - \hbar)^q}{(\tilde{K}_p)^{\frac{q}{p}}} - \frac{K_1 + \tilde{K}_1}{H} > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{2,0}. \quad (2.24)$$

Phần còn lại của phân này được chứng minh tương tự như 2.1.2, phần ii). $\square$

Định lý 2.2.5. *Nếu $\lambda > 0$, nghiệm của Phương trình Equation(2.12) có độ đo xác suất bất biến duy nhất μ^* với giá $\mathbb{R}_+^{2,\circ}$. Hơn nữa,*

(i) *Với mọi μ^* -khả tích $f(x, y) : \mathbb{R}_+^{2,\circ} \rightarrow \mathbb{R}$, ta có*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(x(s), y(s)) ds = \int f(x, y) \mu^*(dx, dy) \text{ a.s. } \forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^{2,\circ}.$$

(ii) *Với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{2,\circ}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|P(t, (x, y, i), \cdot) - \mu^*(\cdot)\| = 0$.*

2.2.2. Ví dụ

Mục này chỉ ra rằng quá trình bước nhảy đường như góp phần cho hệ cho hệ tuyệt chủng. Thật vậy, khi cường độ của bước nhảy khá nhỏ, hệ vẫn giữ được tính phát triển bền vững. Tuy nhiên, khi cường độ của bước nhảy đủ lớn, hệ có thể trở nên tuyệt chủng. Hiện tượng này được thể hiện qua ví dụ sau.

Ví dụ 2.2.3. Giả sử $a_1 = 12; a_2 = 2; b_1 = 1; b_2 = 2.8; c_1 = 1; c_2 = 12.5; \gamma = 1; \alpha = 1; \beta = 1$. Tính toán trực tiếp trên hệ không có bước nhảy ta thu được $\Lambda = 9.9988 > 0$, điều này có nghĩa là hệ (2.12) không có bước nhảy là bền vững. Tuy nhiên ta có thể thấy ngay sau đây, dấu của λ phụ thuộc vào cường độ của bước nhảy. Thật vậy, gọi $f_1(u) = \frac{-0.3 \sin u + 3}{0.1 \sin^2 u - 0.1 \sin u + 1}$, $f_2(u) = \frac{1 + \sin u + \cos u}{2}$, $\mathcal{U} = (0, \infty)$ và $N(t, \cdot) = \sum_{\tau_n \leq t} \mathbf{1}_{\{\cdot\}}(\eta_n)$ là độ đo Poisson ngẫu nhiên, với $\sigma_n = \tau_{n+1} - \tau_n, n = 0, 1, \dots$ là dãy độc lập các biến ngẫu nhiên cùng phân phối mũ với tham số λ_1 (Kỳ vọng là nghịch đảo của λ_1) và (η_n) để minh họa, chúng tôi chọn là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối mũ với tham số bằng 1. Khi đó $\nu(du) = \lambda_1 \mathbf{1}_{\{u \geq 0\}} e^{-u} du$.

Với $\lambda_1 = 1$, ta có $\lambda \approx 9.6667$. Điều này chứng tỏ rằng $y(t)$ tồn tại bền vững. Hơn nữa, quá trình $(x(t), y(t))$ có độ đo xác suất bất biến trên không gian $\mathbb{R}_+^{2,\circ}$.

Với $\lambda_1 = 6.667$ ta có $\lambda \approx -0.55 < 0$, trong khi $\rho = 1.339 > 0$. Theo Định lý 2.2.4 thứ sẽ dần đến 0 khi $t \rightarrow \infty$, trong khi thứ trong mô hình không bị nhiễu bởi bước nhảy vẫn còn tồn tại bền vững ($\Lambda = 9.9988 > 0$.)

Hơn nữa, khi $\lambda_1 = 7.6923$, ta có $\rho = -0.2234$. Theo Mệnh đề 2.2.2, cả mỗi lần thứ đến một lúc nào đó sẽ diệt vong.

Chương 3

Sự tuyệt chủng và bền vững của mô hình tái nhiễm SIRS ngẫu nhiên với tốc độ truyền bệnh tổng quát có bước chuyển trạng thái

Trong Chương 2, luận án đã nghiên cứu đáng điệu tiệm cận của 2 mô hình thú mỗi ngẫu nhiên thông qua ngưỡng tham số. Trong chương này, chúng tôi tiếp tục xây dựng ngưỡng tham số cho mô hình tái nhiễm ngẫu nhiên SIRS với tốc độ truyền bệnh tổng quát có bước chuyển trạng thái. Kết quả này có thể xem như tổng quát hóa về mô hình và cải tiến một số kết quả gần đây như: Cai và cộng sự năm 2015, Han và cộng sự (2013), Lahrouz và cộng sự (2011), Settati và cộng sự (2016) and Zhao và cộng sự (2014).

3.1 Mở đầu

Xét mô hình sau

$$\begin{cases} dS(t) = (-S(t)I(t)F_1(S(t), I(t), \xi_t) + \mu(\xi_t)(K - S(t)) + \gamma_1(\xi_t)R(t))dt \\ \quad - S(t)I(t)F_2(S(t), I(t), \xi_t)dB(t) \\ dI(t) = (S(t)I(t)F_1(S(t), I(t), \xi_t) - (\mu(\xi_t) + \rho(\xi_t) + \gamma_2(\xi_t))I(t))dt \\ \quad + S(t)I(t)F_2(S(t), I(t), \xi_t)dB(t) \\ dR(t) = (\gamma_2(\xi_t)I(t) - (\mu(\xi_t) + \gamma_1(\xi_t))R(t))dt, \end{cases} \quad (3.1)$$

trong đó $S(t), I(t), R(t)$ tương ứng là lớp cá thể miễn cảm với dịch bệnh, nhiễm bệnh và rời khỏi lớp nhiễm bệnh, $\xi_t, t \geq 0$ là xích Markov liên tục phải nhận giá trị trong không gian hữu hạn trạng thái $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, N\}$, $F_1(\cdot), F_2(\cdot)$ là các hàm dương Lipchitz địa phương trên $[0, \infty)^2 \times \mathcal{S}$, $B(t)$ là quá trình Brown 1 chiều, các tham số dương $K, \mu(i), \rho(i), \gamma_1(i), \gamma_2(i)$ với mỗi trạng thái $i \in \mathcal{S}$, lần lượt là sức chứa của môi trường, tỷ lệ chết tự nhiên của lớp S , tỷ lệ chết tự

nhien của lớp I , tỷ lệ mất khả năng miễn dịch và quay lại lớp S , tỷ lệ phục hồi các cá thể bị nhiễm bệnh.

3.2 Điều kiện đủ ra rất gần với điều kiện cần cho sự bền vững

Gọi $B(t)$ là quá trình Brown 1 chiều xác định trên không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Gọi $\mathbb{R}_+^3 := \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ và $\Delta := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 : x + y + z \leq K\}$. Phần trong $\{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$ của $\mathbb{R}_+^3$ ta ký hiệu bởi $\mathbb{R}_+^{3,o}$. Xuyên suốt chương này, ta luôn giả sử rằng $F_j(x, y, i) > 0$ với mọi $(x, y, z, i) \in \Delta \times \mathcal{S}$, $j = \overline{1, 2}$.

Định lý 3.2.1. *Với điều kiện ban đầu $(S(0), I(0), R(0)) \in \mathbb{R}_+^3$, tồn tại duy nhất nghiệm dương toàn cục $\{(S(t), I(t), R(t)), t \geq 0\}$ của Phương trình (3.1) và nghiệm sẽ ở lại trong tập $\mathbb{R}_+^3$ với xác suất 1. Hơn nữa, nếu $I(0) > 0$ thì $I(t) > 0$ với mọi $t \geq 0$ hầu chắc chắn.*

Ta có thể chứng minh rằng $\Delta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 : x + y + z \leq K\}$ là tập bất biến. Do vậy, ta chỉ xét quá trình $(S(t), I(t), R(t))$ trên tập bất biến Δ . Để thuận tiện, ta ký hiệu, $\Phi(t) = (S(t), I(t), R(t))$ là nghiệm của hệ (3.1), và $\phi = (x, y, z) \in \Delta$. Gọi

$$g(x, y, i) = F_1(x, y, i)x - \left(\mu(i) + \rho(i) + \gamma_2(i) + \frac{F_2^2(x, y, i)x^2}{2} \right).$$

Ta xây dựng ngưỡng

$$\lambda = \sum_{i=1}^N g(K, 0, i)\pi_i = \sum_{i=1}^N \left[F_1(K, 0, i)K - \left(\mu(i) + \rho(i) + \gamma_2(i) + \frac{F_2^2(K, 0, i)K^2}{2} \right) \right] \pi_i. \quad (3.2)$$

Định lý 3.2.2. *Nếu $\lambda < 0$ thì $\Phi(t) \rightarrow (K, 0, 0)$ hầu chắc chắn khi $t \rightarrow \infty$ với giá trị ban đầu $(\phi, i) \in \Delta \times \mathcal{S}$, nghĩa là, dịch bệnh sẽ biến mất. Hơn nữa,*

$$\mathbb{P}_{\phi, i} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln I(t)}{t} = \lambda < 0 \right\} = 1 \text{ với } (\phi, i) \in \Delta \times \mathcal{S}, y > 0. \quad (3.3)$$

Chứng minh. Từ giả thiết $\lambda < 0$, ta có thể chọn số dương σ đủ nhỏ sao cho

$$\sum_{j \in \mathcal{S}} (g(K, 0, j) + \sigma)\pi_j < 0.$$

Với hằng số $\delta_1 \in (0, K)$, ta ký hiệu $\mathcal{U}_{\delta_1} = (K - \delta_1, K] \times [0, \delta_1)^2$. Do vậy,

$$\mathcal{L}_i V(x, y, z, i) \leq p[g(K, 0, i) + \sigma]V(x, y, z, i) \text{ for } (x, y, z, i) \in \mathcal{U}_{\delta_1} \times \mathcal{S}.$$

Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $0 < \delta < \delta_1$ sao cho

$$\mathbb{P}_{\phi,i} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} (S(t), I(t), R(t)) = (K, 0, 0) \right\} \geq 1 - \varepsilon \text{ for } (\phi, i) \in \mathcal{U}_\delta \times \mathcal{S}. \quad (3.4)$$

Theo tính Markov mạnh

$$\mathbb{P}_{\phi,i} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = (K, 0, 0) \right\} = 1 \text{ for } (\phi, i) \in \Delta \times \mathcal{S}. \quad (3.5)$$

Theo Định lý 1.1.1 và tính ergodic của quá trình Markov, ta thu được

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t g(\Phi(u), \xi_s) du = \lambda$$

Từ đánh giá này và công thức Itô dẫn đến (3.3). $\square$

Định lý 3.2.3. *Nếu $\lambda > 0$, dịch bệnh sẽ bền vững ngẫu nhiên mạnh theo nghĩa với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\phi,i} \{I(t) \geq \delta\} > 1 - \varepsilon \text{ for any } (\phi, i) \in \Delta \times \mathcal{S}, y > 0. \quad (3.6)$$

Để chứng minh định lý này ta sử dụng kỹ thuật của Benaïm và cộng sự năm 2016. Trước hết ta cần một số bổ đề.

Bổ đề 3.2.4. *Gọi $\partial\Delta_2 := \{\phi = (x, y, z) \in \Delta : y = 0\}$. Khi đó tồn tại hằng số $T > 0$ sao cho với mọi $(\phi, i) \in \partial\Delta_2 \times \mathcal{S}$,*

$$\mathbb{E}_{\phi,i} \int_0^T g(\Phi(t), \xi_t) dt \geq \frac{3\lambda}{4} T. \quad (3.7)$$

Bổ đề 3.2.5. *Gọi Y là biến ngẫu nhiên, giả sử rằng $\mathbb{E} \exp(Y) + \mathbb{E} \exp(-Y) \leq K_1$. Khi đó phép biến đổi log-Laplace $u(\theta) = \ln \mathbb{E} \exp(\theta Y)$ khả vi cấp 2 trên $[0, 0.5]$ và $\frac{du}{d\theta}(0) = \mathbb{E} Y$, $0 \leq \frac{d^2 u}{d\theta^2}(\theta) \leq K_2$, $\theta \in [0, 0.5]$ với hằng số $K_2 > 0$ phụ thuộc vào K_1 . Từ đó, theo khai triển Taylor ta có*

$$u(\theta) \leq \mathbb{E} Y \theta + K_2 \theta^2, \theta \in [0, 0.5].$$

Dựa vào 2 bổ đề trên, ta chứng minh Định lý 3.2.3 trong trường hợp $\lambda > 0$.

Chứng minh. Xét hàm Lyapunov $V_\theta(\phi, i) = y^\theta$, với θ là hằng số thực. Ta có

$$\mathcal{L}_i V_\theta(\phi, i) = \theta y^\theta [F_1(x, y, i)x - (\mu(i) + \rho(i) + \gamma_2(i)) + \frac{\theta - 1}{2} x^2 F_2^2(x, y, i)].$$

Từ đó ta có $LV_\theta \leq H_\theta V_\theta$, với

$$H_\theta = \sup \{ \theta [F_1(x, y, i)x - (\mu(i) + \rho(i) + \gamma_2(i)) + \frac{\theta - 1}{2} x^2 F_2^2(x, y, i)],$$

với $(x, y, z, i) \in \Delta \times \mathcal{S}$. Ta có thể đánh giá được

$$\mathbb{E}_{\phi,i} I^\theta(t) \leq y^\theta \exp(H_\theta t) \text{ với mọi } t \geq 0, (\phi, i) \in (\Delta \setminus \partial\Delta_2) \times \mathcal{S}. \quad (3.8)$$

Dựa vào tính Feller và (3.7), tồn tại $\delta_2 > 0$ sao cho nếu $\phi = (x, y, z) \in \Delta$ với $y < \delta_2$ ta có

$$\mathbb{E}_{\phi,i} G(T) = -\mathbb{E}_{\phi,i} \int_0^T g(\Phi(t), \xi_t) dt \leq -\frac{\lambda}{2} T. \quad (3.9)$$

Với $G(t) = \ln I(0) - \ln I(t)$, từ đánh giá (3.8) ta suy ra $\mathbb{E}_{\phi,i}(e^{G(t)} + e^{-G(t)}) \leq e^{H_1 t} + e^{H_{-1} t} < \infty$. Áp dụng Bổ đề Lemma 3.2.5, ta thu được từ (3.9)

$$\ln \mathbb{E}_{\phi,i} e^{\theta G(T)} \leq -\frac{\lambda\theta}{2} T + \widehat{H}\theta^2 \text{ for } \theta \in [0, 0.5],$$

trong đó $\widehat{H}$ là hằng số phụ thuộc vào T , H_{-1} và H_1 . Với mọi số dương θ đủ nhỏ, tồn tại $\delta_3 > 0$ sao cho

$$\mathbb{E}_{\phi,i} \frac{y^\theta}{I^\theta(T)} = \mathbb{E}_{\phi,i} \frac{I^\theta(0)}{I^\theta(T)} = \mathbb{E}_{\phi,i} e^{\theta G(T)} \leq \exp(-\frac{\lambda\theta}{4} T) \text{ với } \phi \in \Delta, y < \delta_3, i \in \mathcal{S}.$$

Một cách tương đương,

$$\mathbb{E}_{\phi,i} I^{-\theta}(T) \leq qy^{-\theta} \text{ với } q = \exp(-\frac{\lambda\theta}{4} T) \text{ với } \phi \in \Delta, y < \delta_3, i \in \mathcal{S}.$$

Đánh giá này và (3.8) dẫn đến

$$\mathbb{E}_{\phi,i} I^{-\theta}(T) \leq qy^{-\theta} + C \text{ với } C = \delta_3^{-\theta} \exp(H_{-\theta} T) \text{ với } \phi \in \Delta, i \in \mathcal{S}.$$

Điều này suy ra rằng

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\phi,i} I^{-\theta}(t) = \frac{C}{1-q} \exp(H_{-\theta} T) \quad (3.10)$$

Điều này dẫn đến khẳng định (3.6) bởi bất đẳng thức Markov, trong đó δ thỏa $\delta^\theta K \leq \varepsilon$. $\square$

3.3 Ví dụ

Trong mục này, luận án đã so sánh với một số kết quả điển hình trong những năm gần đây, ta có thể thấy rằng kết quả của chúng tôi là mở rộng các kết quả đã được đề cập trước đó trong luận án.

Để minh họa kết quả lý thuyết, chúng tôi xét một số ví dụ sau. Giả sử rằng hàm truyền bệnh có dạng Beddington-DeAngelis:

$$F_1(S, I, \xi_t) = \frac{\beta_1(\xi_t)SI}{1 + a_1(\xi_t)S + b_1(\xi_t)I}, \quad F_2(S, I, \xi_t) = \frac{\beta_2(\xi_t)SI}{1 + a_2(\xi_t)S + b_2(\xi_t)I},$$

trong đó $a_i, b_i, \beta_i, i = (1, 2)$ là các hằng số dương. Giả sử rằng $\mathcal{S} = \{1, 2\}$. Các cường độ chuyển của xích $q_{12} = 0.5, q_{21} = 0.8$, phân phối dừng trong trường hợp này $\pi = (\pi_1, \pi_2) = (\frac{8}{13}, \frac{5}{13})$.

Ví dụ 3.3.1. Giả sử rằng sức chứa môi trường $K = 5$ các hệ số của hệ (3.1) được cho như trong Bảng 3.1. Ta giả sử rằng với $\xi_t = 6$, hệ ở trạng thái 1 và khi $\xi_t = 7$ hệ ở trạng thái 2.

Hệ số Trạng thái	a_1	a_2	b_1	b_2	β_1	β_2	γ_1	γ_2	μ	ρ
1	1.5	0.1	1	1	8	2	1	0.5	2	1
2	1	0.3	1.2	2	5	2	2	0.2	1.5	0.2

Bảng 3.1: Tham số của mô hình trong Ví dụ 3.3.1

Theo công thức (3.2), ta có $\lambda = -4.8819 < 0$. Theo Định lý 3.2.2, $I(t)$ dần đến 0 và $S(t)$ dần đến K khi $t \rightarrow \infty$. Điều này có nghĩa rằng, hệ đến lúc nào đó sẽ sạch bệnh.

Ví dụ 3.3.2. Trong ví dụ này, ta giả sử rằng sức chứa của môi trường $K = 30$. Khi $\xi_t = 1$, hệ ở trạng thái 1, khi $\xi_t = 2$ hệ ở trạng thái 2. Bảng giá trị các tham số của hệ được cho như trong Bảng 3.2

Hệ số Trạng thái	a_1	a_2	b_1	b_2	β_1	β_2	γ_1	γ_2	μ	ρ
1	2	1.7	0.5	1.2	5	1	0.7	0.5	1	0.7
2	1	3	0.6	1.5	3	1.5	0.5	1	0.5	1

Bảng 3.2: Tham số của mô hình trong Ví dụ 3.3.2

Khi đó ta có thể ước lượng $\lambda = 2.3441 > 0$. Do vậy, theo Định lý 3.2.3, $I(t)$ bền vững ngẫu nhiên mạnh.

Kết luận

Luận án đề cập đến các bài toán và các phương pháp tiếp cận để phân loại một số hệ sinh thái trong môi trường ngẫu nhiên thông qua việc nghiên cứu các phương trình vi phân ngẫu nhiên mô tả mô hình sinh thái tương ứng. Bằng việc tập trung vào đáng điệu tiệm cận nghiệm, luận án không chỉ đưa ra điều kiện đủ mà còn rất gần với điều kiện cần cho sự bền vững cũng như là tính ergodic của hệ. Những kết quả này sẽ góp phần thúc đẩy các nghiên cứu trên các mô hình sinh học tiếp theo.

Luận án gồm 2 chương chính. Trong Chương 2 chúng tôi xét lần lượt các mô hình thú mồi bị chịu bởi nhiễu trắng có bước chuyển trạng thái và mô hình thú mồi bị ảnh hưởng đồng thời của nhiễu trắng và nhiễu Lévy. Bằng việc xây dựng tham số λ chúng tôi đã chỉ ra rằng dấu của tham số này sẽ làm thay đổi trạng thái của hệ. Cụ thể: khi $\lambda < 0$, thú đến một lúc nào đó sẽ tuyệt chủng, đồng thời luận án cũng chỉ ra rằng mồi sẽ hội tụ trên biên với tốc độ mũ; Khi $\lambda > 0$ hệ sẽ tồn tại phân phối dừng đồng thời đây cũng là điều kiện để luật số lớn có hiệu lực. Trong Chương 3, luận án đề cập đến mô hình dịch tễ có tái nhiễm SIRS bị chịu cả nhiễu trắng và nhiễu màu với cường độ mắc bệnh được mô tả bằng một hàm số tổng quát, được mô hình hóa bởi hệ phương trình vi phân ngẫu nhiên với bước chuyển Markov. Thông qua ngưỡng tham số, luận án đã chỉ ra điều kiện đủ và rất gần với điều kiện cần để quần thể tồn tại dịch bệnh hoặc sạch bệnh.

Trong tương lai, chúng tôi mong muốn tập trung giải quyết cho trường hợp tới hạn ($\lambda = 0$) cho 1 số mô hình cụ thể. Ngoài ra chúng tôi còn muốn mở rộng kết quả của luận án như xét hệ hỗn hợp 3 nhiễu: nhiễu trắng, nhiễu Lévy, nhiễu của bước chuyển Markov; Hoặc hệ có bước chuyển với cường độ chuyển phụ thuộc vào trạng thái, hoặc nghiên cứu đáng điệu trên một số hệ có cấu trúc. Đó là những bài toán mở được đặt ra sau khi hoàn thành luận án. Đây là các bài toán thú vị, tuy nhiên theo dự đoán thì cách giải quyết vấn đề sẽ khó hơn và chúng tôi mong đợi những kỹ thuật tốt hơn.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. N. H. Du, N. T. Dieu, T. D. Tuong (2017), "Dynamics behavior of a stochastic predator-prey sytem under regime switching", *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*, (22), pp. 3483-3498 (SCI, được sử dụng cho Chương 2 của luận án).
2. T. D. Tuong, N. H. Dang, N. T. Dieu, T. Q. Ky (2019), "Extinction and permanence in a stochastic SIRS model in regime-switching with general incidence rate", *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 34, pp. 121-130 (SCIE, được sử dụng cho Chương 3 của luận án).
3. T. D. Tuong, N. T. Dieu, N. H. Du, "On the asymptotic behavior of a stochastic model with Ivlev's function response and jumps", đang gửi cho tạp chí Stochastic Models (được sử dụng cho Chương 2 của luận án).